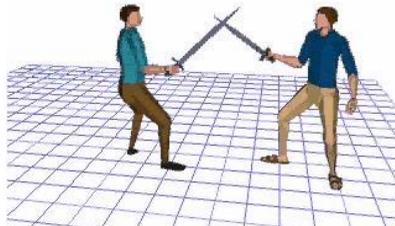




Cinematica degli scheletri



Corso di Realtà Virtuale
Laurea Magistrale in Informatica
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (Ais-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it



A.A. 2023-2024

<http://borghese.di.unimi.it>



Sommario



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta

A.A. 2023-2024

2/42

<http://borghese.di.unimi.it>



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMA} \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Parametri esterni (4x4)

Parametri interni (3x3)

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).



Dal 2D al 3D

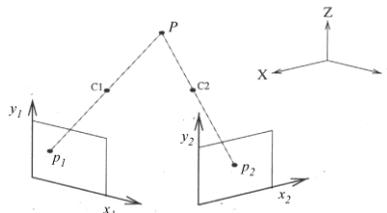
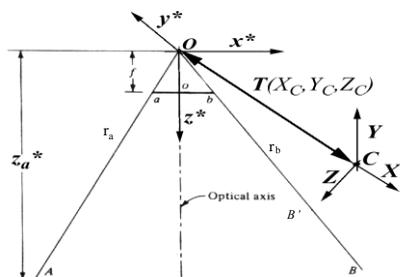


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Nello spazio 3D esistono ∞^1 punti compatibili con b

Sono tutti i punti nello spazio 3D, $\{X,Y,Z\}$ sulla retta per b e O

Ob identifica una retta

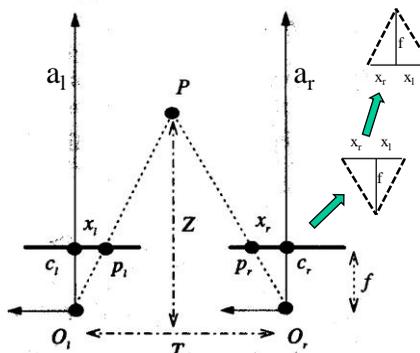
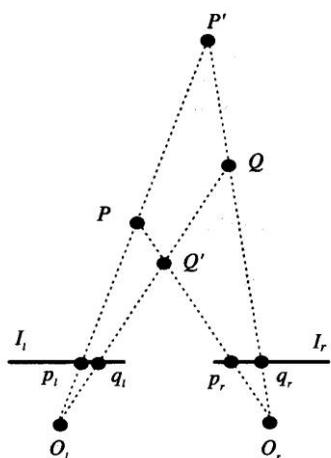
Soluzione: Stereoscopia
Visione attraverso una coppia di sensori



3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, a_r\}$ coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a) $Z / T = f / d = f / (x_l + x_r)$ (b)

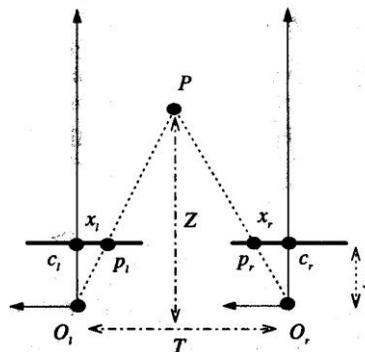
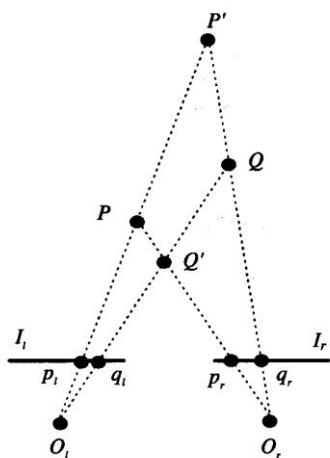
Nel sistema visivo umano, T rappresenta (approssimativamente) la distanza interpupillare, che viene regolata nei visori di VR sull'Utente.



Risoluzione nella profondità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, a_r\}$ coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



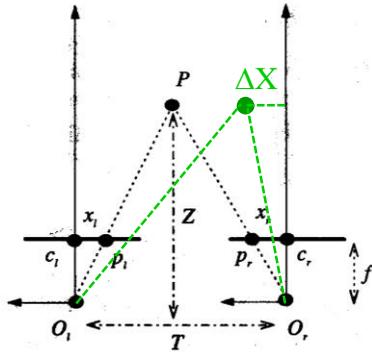
(a)

(b)

$Z / T = f / d \quad d = f T / Z$

$\Delta d / \Delta Z = -f T / Z^2$

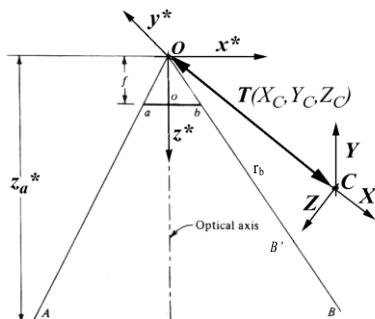
Ricostruzione della posizione laterale



- $O_1 - O_2 =$ baseline
- $\{a_1, a_2\}$ coppia di assi ottici
- x_{1r} disparità destra

$$Z / \Delta X = f / x_{1r} \quad \Delta X = x_{1r} Z / f$$

Dal 2D al 3D nel caso generale



$$x_a = x_o + f * \frac{m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$y_a = y_o + f * \frac{m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$z_a = f$$

Invertiamo le Equazioni di collinearità
 $P(X, Y, Z) \Rightarrow p(x, y, f)$

 $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$



Dal 2D al 3D

$$[m_{31}(\mathbf{X}-X_C)+m_{32}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{33}(\mathbf{Z}-Z_C)]*(x-x_0)=$$

$$f[m_{11}(\mathbf{X}-X_C)+m_{12}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{13}(\mathbf{Z}-Z_C)]$$

$$[m_{31}(\mathbf{X}-X_C)+m_{32}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{33}(\mathbf{Z}-Z_C)]*(y-y_0)=$$

$$f[m_{21}(\mathbf{X}-X_C)+m_{22}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{23}(\mathbf{Z}-Z_C)]$$

$$p(x,y) \Rightarrow P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

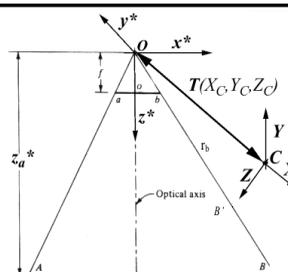
Sono 2 equazioni lineari in 3 incognite $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$:

- $[m_{31}(x-x_0) - fm_{11}] * \mathbf{X} + [m_{32}(x-x_0) - fm_{12}] * \mathbf{Y} + [m_{33}(x-x_0) - fm_{13}] * \mathbf{Z} =$
 $[m_{31}(x-x_0) - fm_{11}] * X_C + [m_{32}(x-x_0) - fm_{12}] * Y_C + [m_{33}(x-x_0) - fm_{13}] * Z_C$
- $[m_{31}(x-x_0) - fm_{21}] * \mathbf{X} + [m_{32}(x-x_0) - fm_{22}] * \mathbf{Y} + [m_{33}(x-x_0) - fm_{23}] * \mathbf{Z} =$
 $[m_{31}(x-x_0) - fm_{21}] * X_C + [m_{32}(x-x_0) - fm_{22}] * Y_C + [m_{33}(x-x_0) - fm_{23}] * Z_C$

Le equazioni di collinearità individuano perciò 2 piani:

- $a_1 \mathbf{X} + b_1 \mathbf{Y} + c_1 \mathbf{Z} = d_1$
- $a_2 \mathbf{X} + b_2 \mathbf{Y} + c_2 \mathbf{Z} = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione Op nello spazio 3D.



Ricostruzione stereoscopica

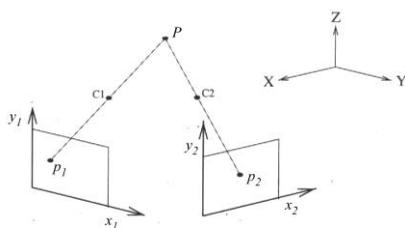


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

2 coppie di immagini \rightarrow 2 coppie di equazioni di collinearità
 $\{p_1(x,y) \Leftrightarrow p_2(x,y)\}$

4 equazioni in 3 incognite:
 $[p_1(x,y) | p_2(x,y)] \Rightarrow P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$.

Equazioni di collinearità per due video-camere:

- $a_{1,TV1} \mathbf{X} + b_{1,TV1} \mathbf{Y} + c_{1,TV1} \mathbf{Z} = d_{1,TV1}$
- $a_{2,TV1} \mathbf{X} + b_{2,TV1} \mathbf{Y} + c_{2,TV1} \mathbf{Z} = d_{2,TV1}$

- $a_{1,TV2} \mathbf{X} + b_{1,TV2} \mathbf{Y} + c_{1,TV2} \mathbf{Z} = d_{1,TV2}$
- $a_{2,TV2} \mathbf{X} + b_{2,TV2} \mathbf{Y} + c_{2,TV2} \mathbf{Z} = d_{2,TV2}$



Soluzione di un sistema lineare

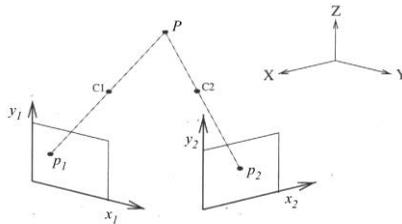


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

- $a_{1,TV1} X + b_{1,TV1} Y + c_{1,TV1} Z = d_{1,TV1}$
- $a_{2,TV1} X + b_{2,TV1} Y + c_{2,TV1} Z = d_{2,TV1}$
- $a_{1,TV2} X + b_{1,TV2} Y + c_{1,TV2} Z = d_{1,TV2}$
- $a_{2,TV2} X + b_{2,TV2} Y + c_{2,TV2} Z = d_{2,TV2}$

4 equazioni in 3 incognite:
 $[p_1(x,y) | p_2(x,y)] \Rightarrow P(XYZ)$.

1 equazione di troppo,

3 equazioni in 3 incognite per i matematici

$$A P = [d_{1,TV1} \ d_{2,TV1} \ d_{1,TV2}]^T$$

$$P = A^{-1} [d_{1,TV1} \ d_{2,TV1} \ d_{1,TV2}]^T$$

Ma il punto P non viene proiettato in $p_1 \ p_2$



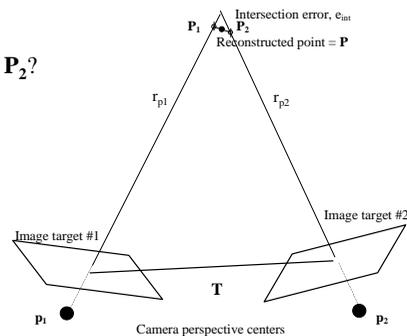
Ricostruzione - matrici



$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{2TV1} & c_{2TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale: $A P = B \Rightarrow A^T A P = A^T B \Rightarrow P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura: quanto vale $P_1 - P_2$?
- Quando non ammette soluzioni?



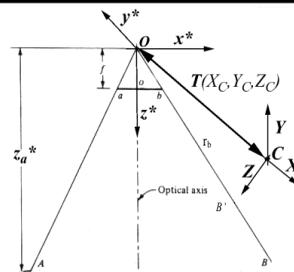


Ricostruzione - Ray intersection

Le equazioni di collinearità individuano perciò una retta come intersezione di 2 piani:

- $a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$
- $a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione Op nello spazio 3D.



Altra soluzione: equazioni in forma parametrica delle due rette:

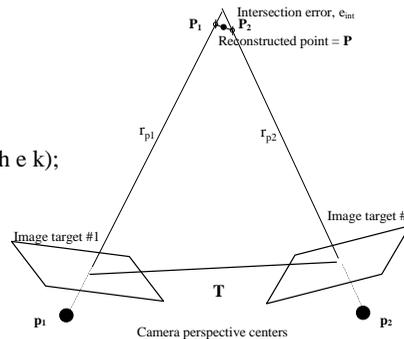
$$\begin{aligned} X_1 &= X_{c1} + a_1 k & X_2 &= X_{c2} + a_2 h \\ Y_1 &= Y_{c1} + b_1 k & Y_2 &= Y_{c2} + b_2 h \\ Z_1 &= Z_{c1} + c_1 k & Z_2 &= Z_{c2} + c_2 h \end{aligned}$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).

Ritrovo la stessa soluzione.

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$$



Riassunto



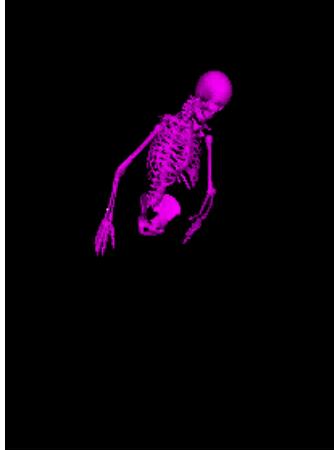
- Ricostruzione 3D
- **Catena cinematica**
- La cinematica diretta



Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



Cinematica: descrizione del movimento indipendentemente dalle cause che lo hanno generato.

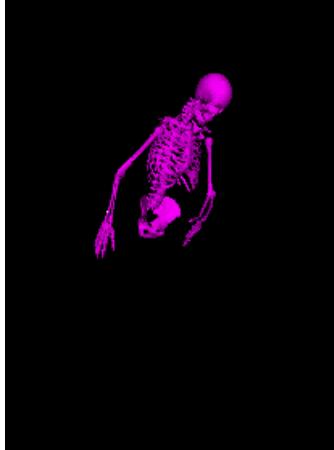
Dobbiamo descrivere il movimento di **tutti** i punti dello scheletro



Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



Per descrivere il movimento dello scheletro, occorre definire l'andamento nel tempo dei suoi parametri liberi (e.g. rotazioni relative)

Curve di animazione: rappresentano l'andamento nel tempo dei parametri liberi di uno scheletro.



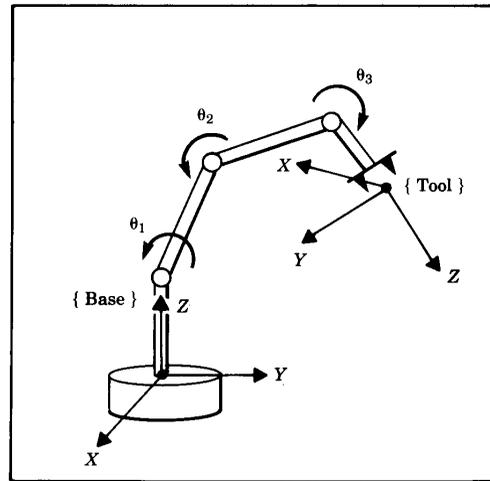
Cinematica diretta



Conosco il valore dei joint (angolo o offset) → posizione ed orientamento dell'end-point.

End-point o end-effector è tipicamente il punto finale di una catena cinematica.

In VR e animazione, l'end-point è qualsiasi punto dello scheletro di interesse.



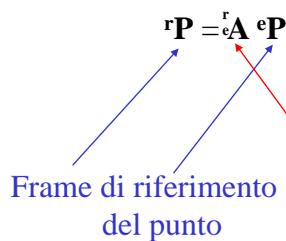
La cinematica viene descritta come sequenza di rotazioni / traslazioni / scala applicate ai singoli joint (relative) che hanno l'effetto di muovere l'end-effector solitamente nello spazio Cartesiano.



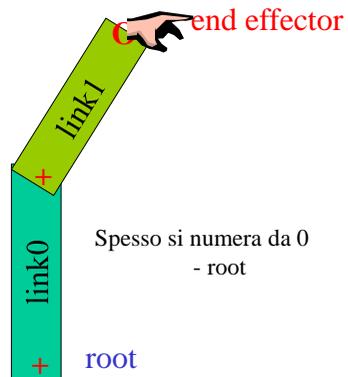
Convenzioni



$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$



Trasformazione del frame e nel frame r



Spesso si numerava da 0 - root

Posizione dei segmenti (I)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$
 Punto P espresso nel frame dell'end-effector.

Trasformiamo ${}^e\mathbf{P}$ fino ad esprimerlo nel sistema di riferimento assoluto
 $\mathbf{S} = \{XYZ\}: {}^{abs}\mathbf{P}$.

A.A. 2023-2024 19/42 <http://borghese.di.unimi.it/>

Posizione dei segmenti (II)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P1_L1}\mathbf{P} = {}^{P1_L1}_e \mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]^T$

Applico una traslazione lungo l'avambraccio

$${}^{P1_L1}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2023-2024 20/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti (III)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P1_L1}\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$

$${}^{P1_L0}\mathbf{P} = {}^{P1_L0}_{P1_L1}\mathbf{A} {}^{P1_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applico una rotazione attorno al braccio (rotazione relativa)

${}^{P1_L0}_{P1_L1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

root

end effector

A.A. 2023-2024 21/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti dall'end-point



$${}^{P1_L0}_e\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{P1_L0}_{P1_L1}\mathbf{A} {}^{P1_L1}_e\mathbf{A}$$

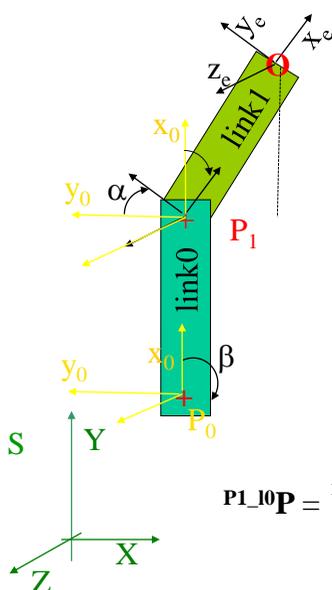
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{P1_L0}\mathbf{P} = {}^{P1_L0}_e\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [0, 0, 0, 1]^T$$

A.A. 2023-2024 22/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Esempio



$${}^{P1}{}_{e}A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

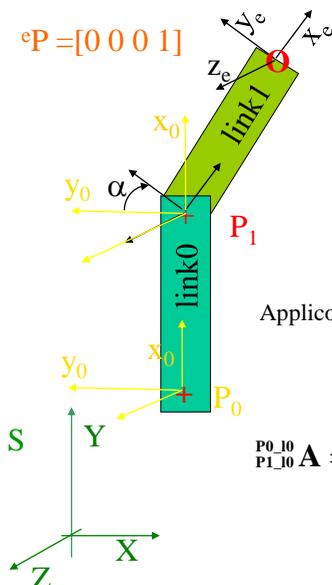
$\alpha = 45^\circ$

$${}^{P1}{}_{0}A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1}{}_{0}P = {}^{P1}{}_{e}A eP = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Posizione dei segmenti (IV)



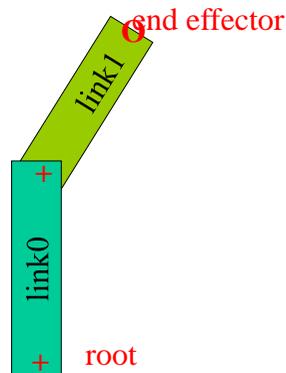
$$eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$${}^{P0}{}_{L0}P = {}^{P0}{}_{P1}A {}^{P1}{}_{L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1}{}_{L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applico una traslazione lungo il braccio

$${}^{P0}{}_{P1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Posizione dei segmenti (V)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$${}^{P_0_ABS}\mathbf{P} = \frac{{}^{P_0_ABS}}{P_0_10}\mathbf{A} \ {}^{P_0_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applico una rotazione attorno alla spalla

$$\frac{{}^{P_0_ABS}}{P_0_10}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

end effector

root

A.A. 2023-2024 25/42 <http://borghese.di.unimi.it/>

Posizione dei segmenti (VI)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$${}^{P_0_ABS}\mathbf{P} = \frac{{}^{P_0_ABS}}{P_0_10}\mathbf{A} \ {}^{P_0_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applicando le formule di prostaferesi (non necessario)

$${}^{P_0_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

root

A.A. 2023-2024 26/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti (VII)



$e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

${}^{ABS_ABS}{}_{P0_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}{}_{P0_ABS}\mathbf{A} \ P0_ABS\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

${}^{ABS_ABS}{}_{P0_ABS}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

link0 + root

${}_{P0_ABS}\mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2023-2024 27/42 http://borghese.di.unimi.it/



Concatenando le trasformazioni



${}^{ABS_ABS}{}_e\mathbf{A} = {}^{ABS_ABS}{}_{P0_ABS}\mathbf{A} \quad {}^{P0_ABS}{}_{P0_10}\mathbf{A} \quad {}^{P0_10}{}_{P1_10}\mathbf{A} \quad {}^{P1_10}{}_{P1_11}\mathbf{A} \quad {}^{P1_11}{}_e\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ABS_ABS}{}_e\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_{P0_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}{}_e\mathbf{A} \ e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

A.A. 2023-2024 28/42 http://borghese.di.unimi.it/



Posizione dei segmenti: fattorizzazione



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS_ABS}{}^e\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ABS_ABS}{}^e\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2023-2024 29/42 <http://borghese.di.unimi.it/>

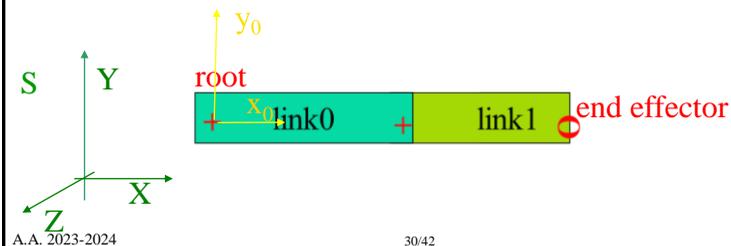


Esempio di calcolo della posizione



$\alpha = 0; \beta = 0$ Braccio allineato come S

$${}^{ABS_ABS}{}^e\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A} \end{matrix}] {}^e\mathbf{P}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} = \begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A} \end{matrix}$$

A.A. 2023-2024

31/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

A è funzione di:

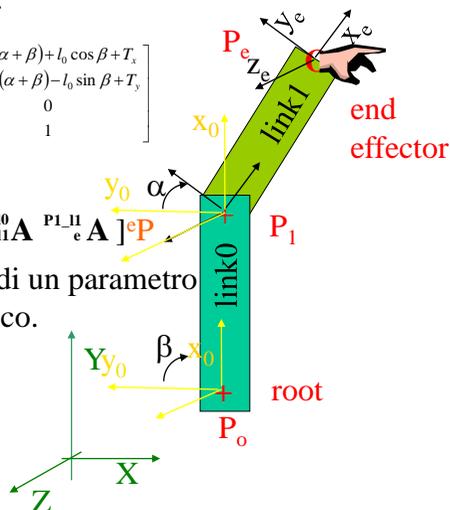
- Geometria
- Parametri liberi

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A} \end{matrix}] {}^e\mathbf{P}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A}(T) & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A}(\beta) \\ {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A}(l_0) & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}(\alpha) & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}(l_1) \end{matrix}] {}^e\mathbf{P}$$



A.A. 2023-2024

32/42

<http://borghese.di.unimi.it/>

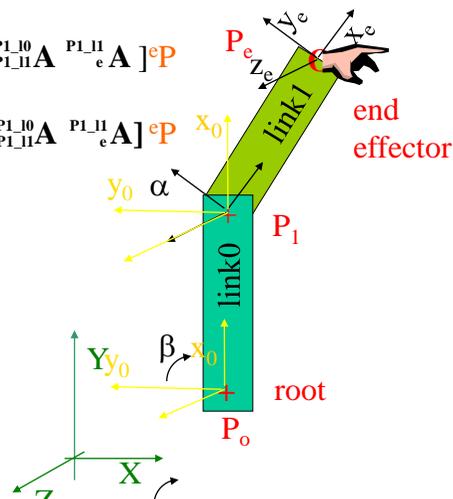


Cosa rappresenta A^{-1}

Rappresenta la trasformazione inversa: dalla base all'end-point

$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}_{P0_ABS}A \quad {}^{P0_ABS}_{P0_10}A \quad {}^{P0_10}_{P1_10}A \quad {}^{P1_10}_{P1_11}A \quad {}^{P1_11}_eA] eP$$

$${}^{ABS_ABS}_{P0_ABS}A^{-1} {}^{ABS_ABS}P = [{}^{P0_ABS}_{P0_10}A \quad {}^{P0_10}_{P1_10}A \quad {}^{P1_10}_{P1_11}A \quad {}^{P1_11}_eA] eP$$



$$eP = {}^{P1_11}_eA^{-1} {}^{P1_10}_{P1_11}A^{-1} {}^{P0_10}_{P1_10}A^{-1} {}^{P0_ABS}_{P0_10}A^{-1} {}^{ABS_ABS}_{P0_ABS}A^{-1} {}^{ABS_ABS}P$$

<http://borghese.di.unimi.it/>



Quante matrici di trasformazione?

- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.
- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.
- Si arriva a 1 matrice di trasformazione, qualsiasi il numero di trasformazioni elementari.
- La matrice di trasformazione complessiva viene costruita in modo incrementale, rispettando la gerarchia.



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- **La cinematica diretta**

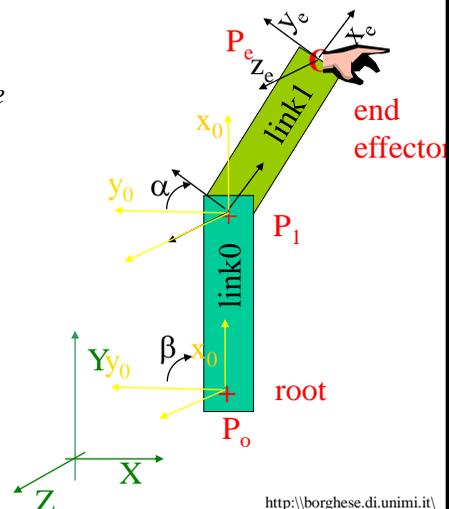


La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.





Come animare uno scheletro

Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio e dell'end-effector.

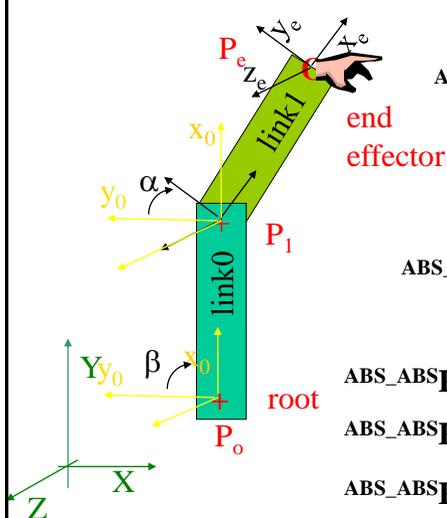
Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \ eP$$

\Rightarrow

$${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a P_0 (angolo β)

Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2023-2024 39/42 http://borghese.di.unimi.it/

Descrizione cinematica diretta

$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di ${}_{ABS_ABS}P(t)$.

imi.it



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P}(\mathbf{t}) = {}^{ABS_ABS}_c\mathbf{A}(\mathbf{t}) \mathbf{e}\mathbf{P}$$

$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_x(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P}_y(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_y(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P}_z(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_z(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

Ciascuna di queste funzioni è rappresentata come prodotto di una riga della matrice \mathbf{A} per \mathbf{P} .



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta